УДК 514.742.4

ОПТИМИЗАЦИЯ СПОСОБА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ГРАДИЕНТУ

И.П. Попов

Актуальность задачи определения функции по ее градиенту можно показать на примере пространственного распределения сил, которое является градиентом энергии соответствующего поля [1–5].

Специфика технических исследований позволяет ограничиться рассмотрением операций в трехмерном пространстве векторных полей и гладких функций.

Существует несколько способов отыскания функции по ее градиенту [6–9]:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \qquad (1)$$

Наиболее простой способ [10] заключается в вычислении криволинейного интеграла:

$$f = \int\limits_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial z}{\partial z}dz =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz .$$

Достоинством этого метода является компактность, недостатком – необходимость выбора начальной точки интегрирования (x_0, y_0, z_0). Последнее сопряжено с произволом, который может отразиться на виде окончательного решения. Кроме того, в ряде случаев это может быть сопряжено с трудностями, вследствие чего придется решать дополнительную задачу.

Пример 1. Для двухмерного случая

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \arcsin y + \ln(y-1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{x}{y-1}$$

возникает проблема с выбором y_0, поскольку должны одновременно выполняться условия $y \le 1$ и $y > 1$.

Есть способы, не имеющие этого изъяна, например [11]. Они заключаются в подборе вспомогательных функций. Однако их существенными минусами являются трудоемкость и громоздкость.

Предлагаемый ниже подход свободен от недостатков указанных способов. По трудоемкости и компактности он сопоставим с первым способом и не предполагает необходимости определения исходной точки интегрирования.

Данный способ определяет ***теорема:*** *функция f может быть восстановлена по ее градиенту (1) в соответствии с формулой*

$$f = \int \frac{\partial f}{\partial x}dx + \int \frac{\partial f}{\partial y}dy + \int \frac{\partial f}{\partial z}dz - 2V_{xyz} - V_{xy} - V_{xz} - V_{yz} + C =$$

$$= P_{xyz}(x, y, z) + P_{xy}(x, y) + P_{xz}(x, z) + P_{x}(x) +$$

$$+\ Q_{xyz}(x,y,z)+Q_{xy}(x,y)+Q_{yz}(y,z)+Q_{y}(y)+$$
$$+\ R_{xyz}(x,y,z)+R_{xz}(x,z)+R_{yz}(y,z)+R_{z}(z)-$$
$$-\ 2V_{xyz}-V_{xy}-V_{xz}-V_{yz}+C\,. \qquad (2)$$

При этом

$$P_{xyz}=Q_{xyz}=R_{xyz}=V_{xyz}\,, \qquad (3)$$

$$P_{xy}=Q_{xy}=V_{xy}\,, \qquad (4)$$

$$P_{xz}=R_{xz}=V_{xz}\,, \qquad (5)$$

$$Q_{yz}=R_{yz}=V_{yz}\,. \qquad (6)$$

Величины (3)–(6) представляют собой функции, содержащие указанные в индексах переменные.

Доказательство. Очевидны равенства:

$$\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=P_{xyz}(x,y,z)+P_{xy}(x,y)+P_{xz}(x,z)+P_{x}(x)\,,$$

$$\int\frac{\partial f}{\partial y}dy=Q_{xyz}(x,y,z)+Q_{xy}(x,y)+Q_{yz}(y,z)+Q_{y}(y)\,,$$

$$\int\frac{\partial f}{\partial z}dz=R_{xyz}(x,y,z)+R_{xz}(x,z)+R_{yz}(y,z)+R_{z}(z)\,,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial^3 P_{xyz}}{\partial x\partial y\partial z}\,,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial^3 Q_{xyz}}{\partial x\partial y\partial z}\,,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial z}dz=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial^3 R_{xyz}}{\partial x\partial y\partial z}\,.$$

откуда непосредственно следует (3).

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 P_{xyz}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 P_{xz}}{\partial x\partial y}\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 Q_{xyz}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 Q_{xy}}{\partial x\partial y}\,,$$

откуда с учетом (3) следует (4).

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 P_{xyz}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P_{xz}}{\partial x\partial z}\,,$$

откуда с учетом (3) следует (5).

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 Q_{xyz}}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 Q_{yz}}{\partial y\partial z}\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\int\frac{\partial f}{\partial z}dz=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 R_{xyz}}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 R_{yz}}{\partial y\partial z}\,,$$

откуда с учетом (3) следует (6).

Координаты градиента функции (2) можно вычислить следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int\frac{\partial f}{\partial x}dx+Q_{xyz}+Q_{xy}+Q_{yz}+Q_{y}+\right.$$

$$+\; R_{xyz}+R_{xz}+R_{yz}+R_{z}-2V_{xyz}-V_{xy}-V_{xz}-V_{yz}+C\Big)=\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Слагаемые в скобках, являющиеся функциями от x, кроме первого взаимно уничтожаются. Частные производные по x от остальных равны нулю.

Аналогичным образом обстоит дело с частными производными по y и z.

Таким образом, градиент правой части (2) равен (1), следовательно, правая часть (2) представляет собой восстановленную функцию f. Теорема доказана.

Следствие.

$$f=V_{xyz}+V_{xy}+V_{xz}+V_{yz}+V_{x}+V_{y}+V_{z}+C, \tag{7}$$

где $V_x=P_x(x)$, $V_y=Q_y(y)$, $V_z=R_z(z)$

Пример 2.

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{z}{y}+\sin y+\frac{z}{x}+2x\right)\mathbf{i}+\left(x\cos y-\frac{xz}{y^2}+2yz^3+3y^2\right)\mathbf{j}+\left(\frac{x}{y}+\ln x+3y^2z^2-e^z\right)\mathbf{k}$$

$$f=\left(\frac{xz}{y}+x\sin y+z\ln x+x^2\right)+\left(\frac{xz}{y}+x\sin y+y^2z^3+y^3\right)+$$

$$+\left(\frac{xz}{y}+z\ln x+y^2z^3-e^z\right)-2\frac{xz}{y}-x\sin y-z\ln x-y^2z^3+C=$$

$$=\frac{xz}{y}+x\sin y+z\ln x+y^2z^3+x^2+y^3-e^z+C.$$

Здесь

$$P_{xyz}=Q_{xyz}=R_{xyz}=V_{xyz}=\frac{xz}{y},$$

$$P_{xy}=Q_{xy}=V_{xy}=x\sin y,\qquad P_{xz}=R_{xz}=V_{xz}=z\ln x,\qquad Q_{yz}=R_{yz}=V_{yz}=y^2z^3,$$

$$P_x=V_x=x^2,\qquad Q_y=V_y=y^3,\qquad R_z=V_z=e^z.$$

Вычисление по формуле (7) еще компактнее.

Библиографический список

1. Попов, И.П. О некоторых аспектах магнитоэлектрического взаимодействия / И.П. Попов // Вестник Челябинского государственного университета. Физика. 2009. Вып. 5. № 24 (162). С. 34–39.

2. Попов, И.П. Построение абстрактной модели силового поля типа электромагнитного. Ч. 1 / И.П. Попов // Наука. Инновации. Технологии. Научный журнал Северо-Кавказского федерального университета. 2015. № 2. С. 41–54.

3. Попов, И.П. Дуально-инверсный аналог силы Ампера для магнитопровода с изменяющимся магнитным потоком, находящегося в электрическом поле / И.П. Попов // Вестник Курганского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 2. № 1 (15). С. 51–52.

4. Попов, И.П. Два подхода классиков электромагнетизма к взаимодействию проводников с токами / И.П. Попов // Вестник Курганского государственного университета. Серия: Естественные науки. 2015. Вып. 7. № 1 (35). С. 55–56.

5. Попов, И.П. Силы, возникающие в вихревом электрическом поле между магнитопроводами с изменяющимися магнитными потоками / И.П. Попов // Вестник Курганского государственного университета. Серия: Технические науки. 2010. Вып. 5. № 1 (17). С. 93–94.

6. Попов, И.П. О некоторых операциях над векторами / И.П. Попов // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. 2014. № 5 (24). С. 55–61.

7. Попов, И.П. Поверхностные градиент, дивергенция и ротор / И.П. Попов // Вестник Псковского государственного университета. Естественные и физико-математические науки. 2014. Вып. 5. С. 159–172.

8. Попов, И.П. Разновидности оператора набла / И.П. Попов // Вестник Амурского государственного университета. Естественные и экономические науки. 2015. Вып. 71. С. 20–32.

9. Попов, И.П. Элементы поверхностного векторного анализа / И.П. Попов // Зауральский научный вестник. 2015. № 1(7). С. 77–84.

10. Богданов, Ю.С. Лекции по математическому анализу / Ю.С. Богданов. Ч. 2. Минск: БГУ, 1978.

11. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2 / Н.С. Пискунов. М.: Наука, 1976.